Grado en Ingeniería Civil

Examen de Matemáticas I - Convocatoria de febrero 2015

Propuesta de ejercicios

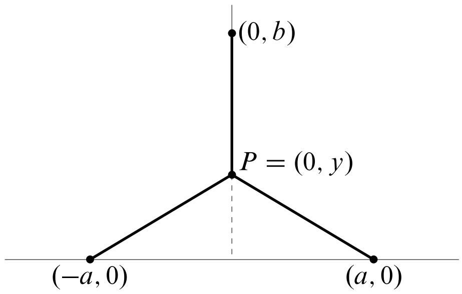
Ejercicio

a) (1 punto) Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua verificando que $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$ para todo $x \in [-1, 1]$. Prueba que hay algún $c \in [-1, 1]$ para el que se verifica la igualdad $f(c) = \frac{1}{4}(c^3 + 3c)$.

b) (1 punto) Prueba que para todo $x \in [0, \pi/2]$ se verifica que $\operatorname{sen} x \geqslant \frac{2}{\pi} x$.

Ejercicio

Dos fábricas están situadas en $(-a, 0)$ y $(a, 0)$ y en $(0, b)$ hay una central eléctrica. Calcula el punto $P = (0, y)$ para que la longitud total del tendido eléctrico desde la central a las fábricas sea mínimo. Debes discutir el resultado según los valores de a y de b.



Ejercicio a) (1 punto) Estudia la convergencia absoluta y la convergencia de las siguientes series:

$$\text{i)} \sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+1}; \qquad \text{ii)} \sum_{n\geqslant 1} \frac{(3n)!}{(5n)^{3n}} 2^n$$

b) (0,5 puntos) Calcula el límite de la sucesión: $x_n = \dfrac{\ln(n!)}{\ln(n^n)}$.

c) (0,5 puntos) Calcula el límite: $\displaystyle \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{2 - 2\cos x} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \right)$.

Ejercicio Dado $t > 0$, sea $V(t)$ el volumen del sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje OX la región del plano comprendida bajo la curva

$$y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(x+1)(x^2+2x+2)}} \qquad (0 \leqslant x \leqslant t)$$

Calcula $V(t)$ y $\displaystyle \lim_{t\to+\infty} V(t)$.

Ejercicio Sea la serie de potencias $\displaystyle \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$.

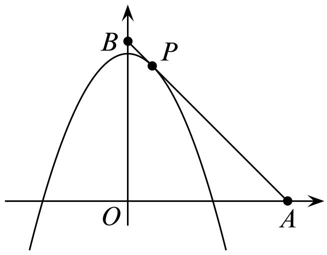
a) (0,5 puntos) Calcula el radio de convergencia y estudia la convergencia de la serie en los extremos del intervalo de convergencia.

b) (1 punto) Calcula, usando el teorema de derivación de series de potencias, la función suma de la serie.

c) (0,5 puntos) Calcula $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n(2n+1)}$.

Ejercicio

Calcula un punto $P = (u, v)$, con $u > 0$, de la parábola $y = 3 - x^2$ de forma que el triángulo OAB determinado por la tangente a la parábola en dicho punto y los ejes coordenados tenga área mínima. Justifica que el resultado obtenido es un mínimo absoluto.

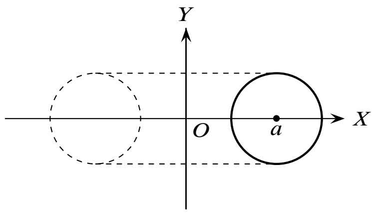


Ejercicio

El círculo limitado por la circunferencia de ecuación

$$(x-a)^2 + y^2 = 1$$

donde $a > 1$, gira alrededor del eje OY. Calcula el volumen del sólido de revolución obtenido:
a) Por el método de los discos o arandelas.
b) Por el métodos de las capas o tubos.



Ejercicio a) (1 punto) Estudia la convergencia absoluta y la convergencia de las siguientes series.

$$a) \sum_{n\geqslant 1} \frac{((n+2)!)^3}{(n+1)^{3n}} 8^n; \qquad b) \sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1-\sqrt{n+1}}$$

b) (0,5 puntos) Calcula el límite de la sucesión: $x_n = \left(1 + \ln \dfrac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^n$.

c) (0,5 puntos) Calcula el límite: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{(\ln(1+x))^2}$.

Ejercicio a) Prueba, usando el teorema de Bolzano, que la ecuación

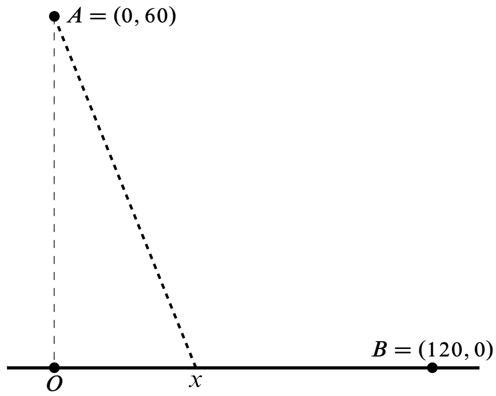
$$\ln x + 15x - 8x^2 + x^3 = 0$$

tiene al menos tres soluciones reales e indica tres intervalos disjuntos que las contienen.

b) Prueba, usando el teorema de Rolle, que dicha ecuación no puede tener más de tres soluciones reales.

Ejercicio

Estás en el desierto con tu vehículo en medio de la arena situado en un lugar cuyas coordenadas son $A=(0,60)$ y tienes que ir a una ciudad cuyas coordenadas son $B=(120,0)$. Por el origen $O=(0,0)$ y por la ciudad B pasa una carretera recta asfaltada que los une. En carretera tu velocidad es de 120 kilómetros por hora y sobre la arena es de 80 kilómetros por hora. ¿Qué camino debes seguir para llegar lo antes posible a B?



Ejercicio Calcula los límites:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x\,\operatorname{sen} x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^2+3)}\right)^{x^2\ln x}$$

Ejercicio Determina el número de ceros de la función: $f(x)=e^x+x^3-6x-2$.

Ejercicio Estudia la monotonía de la función $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ dada por:

$$f(x)=\frac{\ln(x)}{x} \quad (x\in\mathbb{R}^+)$$

y deduce que: a) Para todo $x>0$ se verifica que $x^{1/x}\leqslant e^{1/e}$. ¿Para qué valor de x se da la igualdad?

b) Para $0<a<b\leqslant e$ se verifica que $a^{1/a}<b^{1/b}$ y para $e\leqslant a<b$ se verifica que $a^{1/a}>b^{1/b}$.

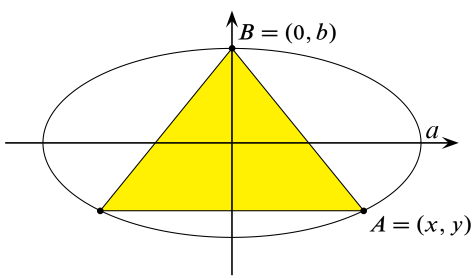
Ejercicio Una corona circular de radio interior $\sqrt{2}$ y radio exterior $\sqrt{6}$ se corta con la parábola de ecuación $y^2=x$. Calcula el área de cada una de las dos regiones resultantes.

Ejercicio

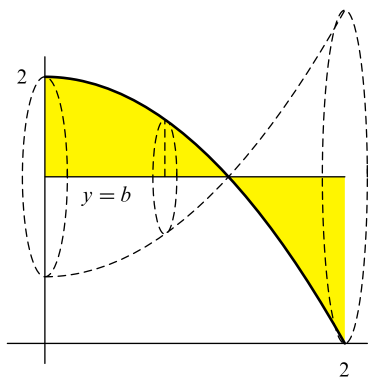
Se considera la elipse de ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Calcula el triángulo isósceles de área máxima inscrito en dicha elipse, que tiene un vértice en el punto $(0,b)$ y base paralela al eje de abscisas.



Ejercicio La parte de la parábola $y=2-\dfrac{x^2}{2}$ donde $0\leqslant x\leqslant 2$ gira alrededor de la recta $y=b$, donde $0\leqslant b\leqslant 2$. Calcular el volumen del sólido resultante (que será una función de b). Calcula el valor de b que hace mínimo el volumen de dicho solido.



Ejercicio Se desea construir un silo, con un volumen V determinado, que tenga la forma de un cilindro rematado por una semiesfera. El costo de construcción (por unidad de superficie) es doble para la semiesfera que para el cilindro (la base es gratis). Calcula las dimensiones óptimas para minimizar el costo de construcción.

Nota. El volumen de una esfera de radio r es $\frac{4}{3}\pi r^3$ y su superficie $4\pi r^2$. La superficie lateral de un cilindro circular recto de radio r y altura h es $2\pi r h$. Naturalmente, el resultado de este ejercicio dependerá del valor de V.

Ejercicio Se desea construir un tanque cilíndrico sin tapa cuya superficie sea $K\pi$ metros cuadrados. ¿Qué relación debe existir entre el radio y la altura para que el volumen sea máximo? ¿Para qué valor de K el radio es 1 metro? Calcula el volumen máximo para $K = 12$.

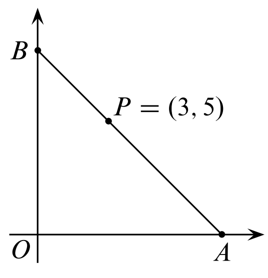
Ejercicio Calcula las dimensiones (radio y altura) del depósito de máximo volumen formado por un cilindro recto cerrado en sus extremos por semiesferas cuya superficie total es igual a 2π metros cuadrados.

Ejercicio Calcular el área del rectángulo de máxima área cuya diagonal tiene longitud $d > 0$.

Ejercicio Dados los puntos $A = (0, 3)$ y $B = (2, 2)$, calcula cuál es el camino más corto para ir de A a B pasando por un punto del eje de abscisas.

Ejercicio

Determinar la recta que pasa por el punto $(3, 5)$ que forma con los ejes coordenados un triángulo de área mínima. Justifica que el resultado obtenido es un mínimo absoluto.



Ejercicio

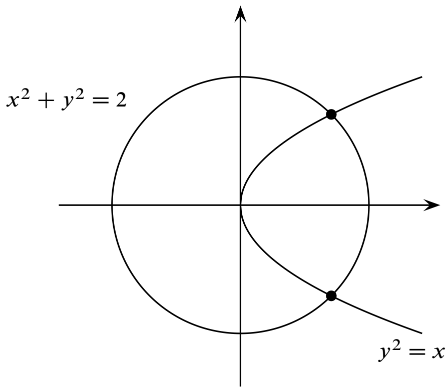
a) Calcula para $t > 0$ la integral:

$$V(t) = \int_0^t \frac{3 + 2x}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}\, dx\,.$$

b) Calcula el límite $\lim_{t \to +\infty} V(t)$.

Ejercicio

a) Calcula el área de las dos partes en que la parábola $y^2 = x$ divide al círculo $x^2 + y^2 = 2$.



Ejercicio

a) Prueba, usando el teorema de Bolzano que la ecuación

$$\mathrm{e}^x - 3x^2 = 0$$

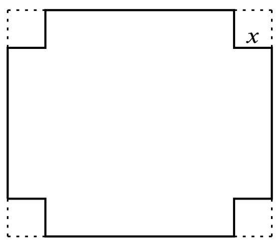
tiene al menos tres soluciones reales.

b) Prueba, usando el teorema de Rolle, que dicha ecuación no puede tener más de tres soluciones reales.

Ejercicio Estudia la convergencia y la convergencia absoluta de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{\log(n+2)}{n+2}$.

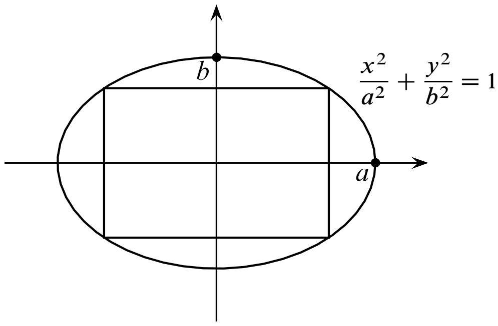
Ejercicio

Se quiere construir una caja sin tapa con una lámina metálica rectangular cortando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Halla las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse de tal modo si los lados de la lámina rectangular miden 12 cm. y 18 cm.



Ejercicio Una lámina metálica rectangular va a ser enrollada para formar la cara lateral de un recipiente cilíndrico. El perímetro de dicha lámina debe ser igual 4 metros. Calcular las dimensiones, ancho y alto, de la lámina para que el volumen del recipiente sea máximo.

Ejercicio Calcula las dimensiones y el área del rectángulo de lados paralelos a los ejes coordenados de mayor área que puede inscribirse en una elipse de semiejes $a > 0$ y $b > 0$.



Ejercicio Calcula la integral doble:

$$\iint_A (x^2+y^2)^{-3/2}\,\mathrm{d}(x,y)$$

Donde:

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2\leqslant 1,\ x+y\geqslant 2\right\}$$

Ejercicio Calcula la integral doble:

$$\iint_A \frac{1}{(4-x^2-y^2)(1+x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y)$$

Donde:

$$A=\left\{(x,y) : x^2+y^2\leqslant 1,\ |y|\leqslant x\right\}$$

Ejercicio Clasifica los extremos relativos del campo escalar $f(x,y)=2xy-2x^3y-xy^2+x^3y^2$.

Ejercicio Calcula el área de las dos partes en que la parábola $y^2=3x$ a divide al círculo $x^2+y^2=4$.

Ejercicio Se considera la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y)=\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}+1$$

a) Calcula y clasifica los puntos críticos de f en el disco abierto $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<4\right\}$.

b) Calcula los extremos absolutos de f en el disco cerrado $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqslant 4\right\}$.

Ejercicio Se considera la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y)=x^2y^3+x^2+6y^2$$

a) Calcula y clasifica los puntos críticos de f.

b) Calcula los extremos absolutos de f en el disco cerrado $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqslant 5\right\}$.

Ejercicio

a) Clasifica los extremos relativos del campo escalar $f(x,y)=x^3+y^3-xy^2-x+16$.

b) Calcula el máximo y el mínimo absolutos de dicho campo escalar en el conjunto:

$$K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqslant 2,\ y\geqslant 0\right\}$$

Ejercicio Sea $f(x, y) = y^3 + 2x^2 + y^2 - 4x - 8$.

a) Clasifica los puntos críticos de f.

b) Calcula los puntos donde se alcanzan los valores máximo y mínimo absolutos de f en la elipse

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leqslant 3\right\}$$

Ejercicio Sea Γ la curva intersección de la esfera $x\mathcal{Q} + y\mathcal{Q} + z\mathcal{Q} = 1$ y el plano $x + y + z = 1$. Calcula los puntos de Γ que están más cerca y más lejos del punto $(1, 2, 3)$. Justifica que los resultados obtenidos son valores máximos y mínimos absolutos.

Ejercicio Calcula la integral doble:

$$\iint_A (x^2 + y^2)\sqrt{1 - x^2 - y^2}\, \mathrm{d}(x, y)$$

donde el recinto de integración es el conjunto:

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0,\, y \geqslant 0,\, x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}.$$

Ejercicio Calcula la integral doble:

$$\iint_A \frac{x}{1 + x^2 + y^2}\, \mathrm{d}(x, y)$$

donde el recinto de integración es el conjunto:

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0,\, y \geqslant 0,\, x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}.$$

Ejercicio Calcula la integral doble:

$$\iint_A \frac{x^2\, \mathrm{e}^{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, \mathrm{d}(x, y)$$

donde el recinto de integración es el conjunto:

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0,\, y \geqslant 0,\, 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\right\}.$$

Ejercicio Calcula la integral:

$$\iint_A \frac{\sqrt{x^2 + y^2}\, \mathrm{e}^{x^2+y^2}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\, \mathrm{d}(x, y).$$

Donde:

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y,\ 0 \leqslant x,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}.$$

Ejercicio Calcula la integral

$$\iint_A \frac{1}{(4 - x^2 - y^2)(1 + x^2 + y^2)}\, \mathrm{d}(x, y)$$

Donde

$$A = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1,\ |y| \leqslant x\right\}$$